Opgave 613 Vis at funktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin nx \quad 3\cos^2 nx}{2^n + 1}, x \in R$$

er kontinuert, f.eks. ved at finde en konvergent majorantrække. Majorantrækken findes ved at finde den række, der har den størst mulige værdi.

$Cos(nx) \leq 1$ er den størst mulige værdi af tælleren mellem 0 og 3, 3. Derfor bliver

$$k_n = \frac{3}{2^n + 1}$$

Hvis ovenstående majorantrække er konvergent er *f(x)* kontinuert ifølge sætnig 5.32. Derfor benyttes kvotientkriteriet til at undersøge om den er konvergent

$$a_n = \frac{3}{2^n + 1} \quad a_{n+1} = \frac{3}{2^{n+1} + 1}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{3}{2^{n+1}+1}}{\frac{3}{2^n+1}}\right| = \left|\frac{3(2^n + 1)}{3(2^{n+1} + 1)}\right| = \left|\frac{2^n + 1}{2^n \quad 2^1 + 1}\right| = \frac{1}{2}$$

C<1 hvorfor majorantrækken er absolut konvergent, dermed er funktionen også kontinuert.

Opgave 614 Det er oplyses, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ har konvergensradius $\rho = 1$. Sæt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in]\ 1,1[.$$

(a) Gør rede for, at *f* er differentiabel, og udtryk *f'(x)* ved en uendelig række.

Sætning 5.13. siger, at når potensrækken har en konverkensradius som er $\rho > 0$ og $x \in \left]-\rho, \rho\right[$ så er $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ vilkårligt ofte differentiabel. Da konvergensradiusen er 1 og x ligger mellem -1 og 1 må *f(x)* derfor være differentiabel.

(b) Vis at,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right), x \in]-1,1[$$

Sætning 5.1 siger, at en kvotientrække $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$er konvergent, hvis og kun hvis den numeriske værdi af x er mindre end 1. Når denne værdi er mindre end 1 er summen givet ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^{n2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)+(1+x)}{(1+x)(1-x)}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

(c) Bestem v.h.a. (b) et funktionsudtryk for *f(x).*

Ved at gå ud fra $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right), x \in]-1{,}1[$ kan et udtryk for *f(x)*findes. Stamfunktionen for *f'(x)* findes og da stamfunktionen til $\frac{1}{x}$ er ln(x) bliver den

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} + \frac{1}{\ln(1-x)}\right), x \in]-1{,}1[$$